UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1111 sept.-dic. de 2012
Parcial 3 tipo único [40%]
30 de noviembre de 2012
Solución

Pregunta 1. (8 ptos.) Suponiendo que *y* es función de *x* , definida implícitamente por la ecuación $x+\sqrt{xy} + y = 1$, halle $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

Pregunta 2. (4 ptos.) Dada la función inyectiva $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$, de la cual se conoce que $f(1)=\sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$, $f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}\sqrt{7}$,
calcule $(f^{-1})'(\sqrt{6})$.

Pregunta 3. (14 ptos.) Dada la función $f(x)= \dfrac{x^3+x^2+4}{2x^2}$, determine lo siguiente :

a) (2 ptos.) Puntos críticos ;
b) (2 ptos.) Asíntotas;
c) (2 ptos.) Intervalos de crecimiento y decrecimiento;
d) (2 ptos.) Máximos y mínimos (locales y globales);
e) (2 ptos.) Intervalos de concavidad;
f) (2 ptos.) Puntos de inflexión;
g) (2 ptos.) Gráfico de la función.

Pregunta 4. (8 ptos.) Un rectángulo tiene un vértice en el origen, los dos lados adyacentes sobre los ejes y el vértice opuesto ,P , en el primer cuadrante, sobre la recta que pasa por los puntos A(0,7), B(4, 0).
Hallar las coordenadas del punto P de manera que el área del rectángulo sea máxima.

Pregunta 5. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}(x)} - \dfrac{2}{\cos^2(x)} \right)$

SOLUCION

Pregunta 1. (8 ptos.) Suponiendo que *y* es función de *x* , definida implícitamente por la ecuación $x+\sqrt{xy} + y = 1$, halle $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución.
Hay varias maneras para proceder, cuyos resultados son equivalentes, aunque aparentemente distintos.
Por ejemplo podemos derivar implícitamente $(x+\sqrt{xy} + y -1 = 0)$
o podríamos en su lugar derivar la expresión $(xy - (1-x-y)^2 = 0)$.

$$\frac{d}{dx}(x+\sqrt{xy} + y -1 = 0) \Rightarrow 1+\frac{y+xy'}{2\sqrt{xy}} +y' = 0 \Rightarrow 2\sqrt{xy} + y + xy' +2y'\sqrt{xy} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' =(-1)\frac{y+ 2\sqrt{xy}}{x+ 2\sqrt{xy}} \;;$$

Para obtener una fórmula que represente la derivada segunda, hay igualmente varias maneras para proceder, que llevan a resultados aparentemente distintos.
Una manera es la siguiente , teniendo en cuenta que $\sqrt{xy} =1-x-y$:

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1111 sept.-dic. de 2012
Parcial 3 tipo único [40%]
30 de noviembre de 2012
Solución

$y'' = (-1)\left(\dfrac{y+2\sqrt{xy}}{x+2\sqrt{xy}}\right)' = (-1)\left(\dfrac{y+2-2x-2y}{x+2-2x-2y}\right)' = (-1)\left(\dfrac{2-2x-y}{2-x-2y}\right)' = \left(\dfrac{2x+y-2}{2-x-2y}\right)' =$

$= \dfrac{(2+y')(2-x-2y)+(1+2y')(2x+y-2)}{(2-x-2y)^2} = \dfrac{(2-3y)+y'(3x-2)}{(2-x-2y)^2}$

[y para obtener una fórmula en función de *x*, *y*, bastaría ahora reemplazar y ' por una de sus expresiones , por ejemplo por $\left(\dfrac{2x+y-2}{2-x-2y}\right)$].

Pregunta 2. (4 ptos.) Dada la función inyectiva $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$, de la cual se conoce que $f(1)=\sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$, $f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}\sqrt{7}$,
calcule $(f^{-1})'(\sqrt{6})$.

Solución.

Como $f'(x)= \sqrt{x^2+1} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$, aplicando el teorema de la derivada de la función inversa, se tiene :

$(f^{-1})'(\sqrt{6}) = (f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$, con $f(a)=\sqrt{6}$;

como en el enunciado se informa que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3}$ [$=\sqrt{2.3} = \sqrt{6}$] , tenemos $a=\sqrt{2}$,

$f'(a)=f'(\sqrt{2}) = \dfrac{1+4}{\sqrt{2+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ y por consiguiente $(f^{-1})'(\sqrt{6}) = \dfrac{1}{f'(\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Pregunta 3. (14 ptos.) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+4}{2x^2}$, determine lo siguiente :

a) (2 ptos.) Puntos críticos ;
b) (2 ptos.) Asíntotas;
c) (2 ptos.) Intervalos de crecimiento y decrecimiento;
d) (2 ptos.) Máximos y mínimos (locales y globales);
e) (2 ptos.) Intervalos de concavidad;
f) (2 ptos.) Puntos de inflexión;
g) (2 ptos.) Gráfico de la función.

Solución.

a,c,d) Los puntos críticos de f son los puntos de su dominio donde la derivada es nula o no existe.

$f'(x) = \dfrac{(3x^2+2x)2x^2-4x(x^3+x^2+4)}{4x^4} = \dfrac{2x^4-16x}{4x^4} = \dfrac{x^3-8}{2x^3} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2x^3}$;

como el factor x^2+2x+4 no se anula por ningun valor de x, ya que es un polinomio de segundo grado con discriminante negativo, el único punto critico es x=2;
el diagrama de los signos de la derivada es el siguiente :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1111 sept.-dic. de 2012
Parcial 3 tipo único [40%]
30 de noviembre de 2012
Solución

```
           ---------------------- 0 ----------- 2-------------
f '(x)  + + + +  + + + + *- - - - - - - 0 + + + + +
```

por lo cual nos enteramos que :
f(x) es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $[2, +\infty)$, decreciente en $(0, 2]$;
f tiene un solo mínimo local en $x=2$
[que no es mínimo absoluto ya que $f(2)=2$, mientras que por ejemplo $f(-2)=0 < 2$]
como el único mínimo local de f no es mínimo absoluto, también queda claro que f no tiene mínimo absoluto.
f no tiene máximos locales y por consiguiente tampoco máximo absoluto.

b) como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)= \infty$, hay una **asíntota vertical**, de ecuación $x=0$;

como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)= \infty$, no hay asíntotas horizontales ;

como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2+4}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$ observamos que posiblemente hay una asíntota oblicua de pendiente $m=\dfrac{1}{2}$;

como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3+x^2+4}{2x^2} - \dfrac{x}{2} \right)= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3+x^2+4-x^3}{2x^2} \right)= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+4}{2x^2} \right) = \dfrac{1}{2} = p$

nos enteramos que hay una **asíntota oblicua** de ecuación $y = \dfrac{x+1}{2}$;

Observación.

Como f está definida por un cociente de polinomios, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cuyo grado del númerador es igual al grado del denominador +1, se podía también asegurar de antemano la existencia de una asíntota oblicua y obtener su ecuación igualando "*y*" al cociente de la división
P(x): Q(x).

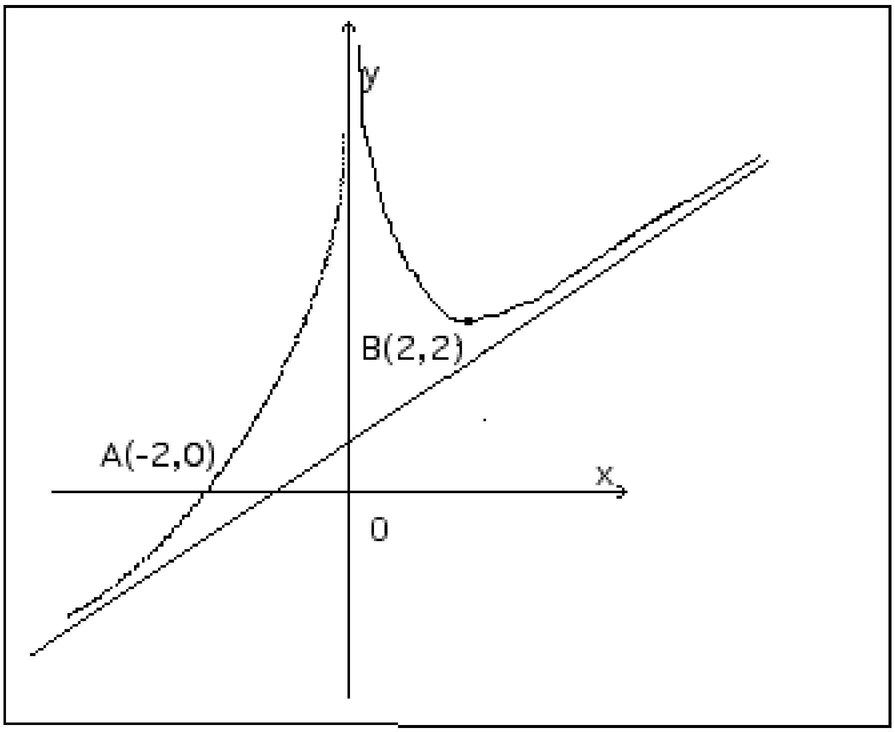
e,f) $f''(x) = \left(\dfrac{x^3- 8}{2x^3} \right)' = \dfrac{12}{x^4} > 0$ por lo cual la concavidad es siempre positiva y no hay puntos de inflexión;

g) Antes de bosquejar el gráfico de la función, es conveniente observar que hay una única intersección del gráfico con los ejes, a saber el punto A(-2,0) y que no hay intersecciones del gráfico con la asíntota oblicua, ya que el sistema : $\begin{cases} y=\dfrac{x^3+x^2+4}{2x^2} \\ y= \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$ no tiene solución.

También es conveniente observar [basados en el diagrama de los signos de la derivada]que el gráfico cerca de la asíntota x=0 por la izquierda sube y por la derecha baja.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1111 sept.-dic. de 2012
Parcial 3 tipo único [40%]
30 de noviembre de 2012
Solución



Pregunta 4. (8 ptos.) Un rectángulo tiene un vértice en el origen, los dos lados adyacentes sobre los ejes y el vértice opuesto ,P , en el primer cuadrante, sobre la recta que pasa por los puntos A(0,7), B(4, 0).
Hallar las coordenadas del punto P de manera que el área del rectángulo sea máxima.

Solución.

Ecuación de la recta por A, B : $\frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1$; coordenada *y* en función de x : $y = 7(1- \frac{x}{4})$.

Area del rectángulo : $xy = 7x(1- \frac{x}{4}) = 7(x - \frac{x^2}{4}) = f(x)$;

Dominio de f(x) : [0, 4] ;

Observamos que siendo f(x) continua en el intervalo cerrado [0, 4] , por el teorema del máximo seguramente tiene máximo y mínimo absolutos;
también observamos que en los extremos del dominio, cuando x=0, o x=4 , el rectángulo degenera en un segmento, de área nula. Por consiguiente el máximo se obtendrá cuando x coincide con un punto crítico [punto del dominio donde f ' es nula o no existe].

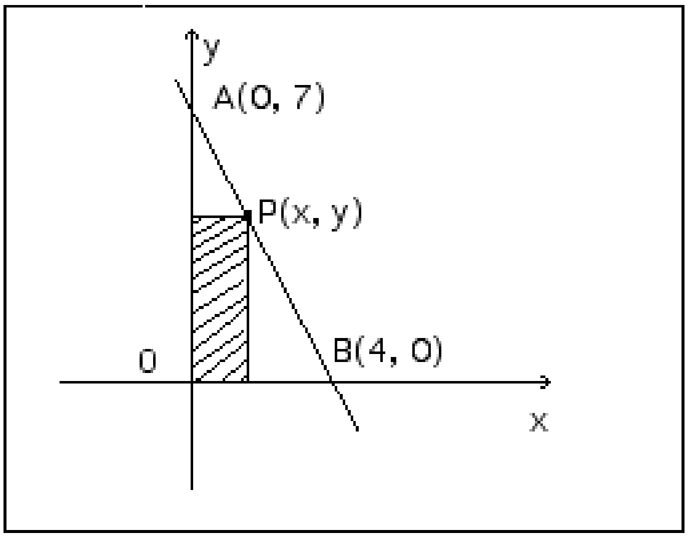
$f'(x)= 7(1 - \frac{x}{2}) = 0 \Rightarrow x=2$;

como $f''(2)= - 7 < 0$ en x=2 se tiene un máximo local y como es el único máximo local y por el teorema del máximo f tiene máximo absoluto, se concluye que f tiene en x=2 un máximo absoluto.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1111 sept.-dic. de 2012
Parcial 3 tipo único [40%]
30 de noviembre de 2012
Solución

Las coordenadas de P, vértice del rectángulo de área máxima, son entonces : $P(2, \frac{7}{2})$.



Pregunta 5. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1-\text{sen}(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}\right)$

Solución.

i) No es necesario aplicar la regla de De L'Hopîtal, ya que como

$\frac{1}{1-\text{sen}(x)} = \frac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}^2(x)} = \frac{1+\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}$ se tiene :

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1-\text{sen}(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}\right) = \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1+\text{sen}(x)-2}{\cos^2(x)}\right) =$$

poniendo $u=x-\frac{\pi}{2}$ y recordando que $\text{sen}(u+\frac{\pi}{2}) = \cos(u)$, $\cos(u+\frac{\pi}{2})= -\text{sen}(u)$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\cos(u)-1}{\text{sen}^2(u)} = \lim_{u\to 0}(-1)\frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\frac{u^2}{\text{sen}^2(u)} = (-1)\frac{1}{2}.1 = -\frac{1}{2}.$$

ii) Usando la regla de De L'Hopîtal [*] tenemos :

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1-\text{sen}(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}\right) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2(x)-2+2\text{sen}(x)}{\cos^2(x)-\text{sen}(x)\cos^2(x)}) = [*]$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\cos(x)\text{sen}(x)+2\cos(x)}{-2\cos(x)\text{sen}(x)-\cos^3(x)+2\cos(x)\text{sen}^2(x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\text{sen}(x)+2}{-2\text{sen}(x)-\cos^2(x)+2\text{sen}^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\text{sen}(x)+2}{-2\text{sen}(x)-1+3\text{sen}^2(x)} =[*] \lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\cos(x)}{-2\cos(x)+6\text{sen}(x)\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{-2}{-2+6\text{sen}(x)} = -\frac{1}{2}.$$